# XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

## *Решения задач основного тура*

*Задачи предполагают полные решения. Один лишь ответ без решения оценивается нулем баллов. Около каждой задачи указано, от какого класса оргкомитет рекомендует задачу, но это только ориентир. Любой участник может решать любую задачу и получать за нее баллы. Баллы за задачи суммируются.*

**1. Ровесники (от 6 класса, 1 балл).** Витя и Маша родились в одном и том же году в июне. Найдите вероятность того, что Витя хотя бы на один день старше Маши.

*Ответ*: $\frac{29}{60}$.

*Решение*. $\frac{1}{2}\cdot\frac{900-30}{900}=\frac{29}{60}\approx 0,483$.

**2. Круглый стол короля Артура.** Три рыцаря случайным образом рассаживаются на стулья, расставленные вокруг стола при дворе короля Артура. Какова вероятность того, что по обе стороны от каждого рыцаря окажется свободный стул, если:
а) стульев всего 7? **(От 6 класса, 1 балл)**.
б) стульев всего $n$? **(От 7 класса, 2 балла)**.

*Ответ*: а) $0,2$; б) $\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$.

*Решение*. Решить задачу с семью стульями можно перебором. Решим задачу в общем случае (пункт б). При $n<6$ вероятность равна $0$. Рассмотрим случай $n\geq 6$. Предположим для определенности, что один из этих рыцарей – сам король Артур, и он занял какое-то место. Тогда всего существует ровно $C_{n-1}^2$ способов рассадить еще двух рыцарей.

Представим, что справа от себя на соседний стул король положил свой шлем, и каждый рыцарь поступает так же: кладет свой шлем на стул справа от себя. Король и его шлем уже заняли какие-то два стула. Осталось две пары «рыцарь-шлем» и еще $n-6$ стульев, которым суждено остаться пустыми. Всего $n-4$ объекта, из которых нужно выбрать два места для двух рыцарей с их шлемами. Равновозможных способов сделать это $C_{n-4}^2$. Искомая вероятность равна

$$\frac{C_{n-4}^2}{C_{n-1}^2}=\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}.$$

В случае $n=7$ получаем ответ $\frac{1}{5}$ к пункту а).

**3. Переполненные вагоны.** Гистограмма (рис. 1) показывает распределение вагонов пассажирского состава по количеству пассажиров (в 4% вагонов пассажиров от 10 до 19, в 6% вагонов – от 20 до 29 и т.д.). Если в вагоне 60 пассажиров или больше, то назовем такой вагон *переполненным*.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Найдите долю переполненных вагонов.

б) **(от 6 класса, 2 балла).** Найдите наименьшую возможную долю пассажиров, едущих в переполненных вагонах.

в) **(от 6 класса, 2 балла).** Может ли доля пассажиров, едущих в переполненных вагонах, быть меньше доли переполненных вагонов?

Распределение вагонов по числу пассажиров

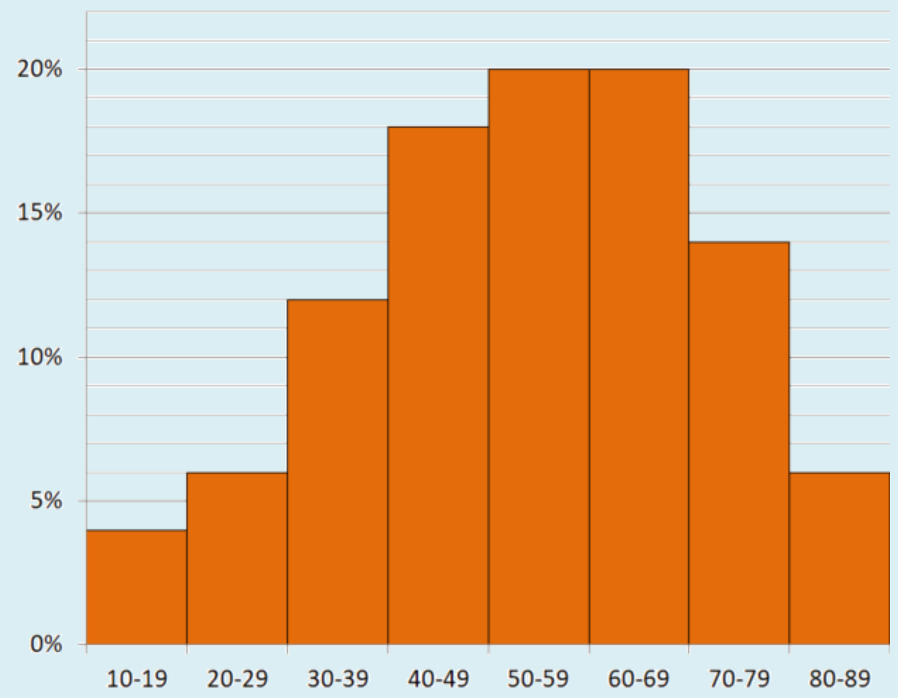



Рис. 1

*Ответ:* а) 40%; б) прибл. 49%; в) не может.

*Решение***.** б) Чтобы доля пассажиров в переполненных вагонах была как можно меньше, в них должно быть как можно меньше пассажиров, а в непереполненных — как можно больше. Пусть всего вагонов $N$. Найдем наибольшее возможное количество пассажиров в непереполненных вагонах:

$$19\cdot 0,04N+29\cdot 0,06N+39\cdot 0,12N+49\cdot 0,18N+59\cdot 0,2N=27,8N;$$

а затем наименьшее возможное количество пассажиров, ехавших в переполненных вагонах:

$$60\cdot 0,2N+70\cdot 0,14N+80\cdot 0,06N=26,6N.$$

Доля пассажиров в переполненных вагонах равна

$$\frac{26,6N}{26,6N+27,8N}=\frac{266}{544}\approx 0,49.$$

в) Предположим, что всего вагонов $N$, и в них едет $n$ пассажиров, а переполненных вагонов $M$, и в них $m$ пассажиров. Тогда в среднем в вагоне пассажиров $\frac{n}{N}$, а в переполненном $\frac{m}{M}$ пассажиров, и второе число не меньше (больше, если есть хотя бы один непереполненный вагон), чем первое:

$$\frac{n}{N}\le\frac{m}{M}, \text{ откуда } \frac{M}{N}\le\frac{m}{n}.$$

**4. Метро в Анчурии (от 6 класса, 2 балла).** В каждом из пяти городов Анчурии имеется метрополитен. На рисунке 2 показаны схемы линий метро в этих пяти городах. Некоторые сведения о метрополитенах Анчурии даны в таблице 1. Определите, к какому городу относится каждая схема.

Табл 1. Метрополитены в городах Анчурии

| Город | Общая протяженность линий, км | Количество станций | Пассажиропоток в день, тыс. чел. | Средняя длина перегона между соседними станциями, км |
|---|---|---|---|---|
| Сан-Матео | 39 | 20 | 100 | 1,5 |
| Коралио | 15 | 9 | 22 | 1,5 |
| Аласан | 16 | 9 | 20 | 2 |
| Альфоран | 18 | 9 | 30 | 2 |
| Солитас | 14 | 8 | 25 | 2 |

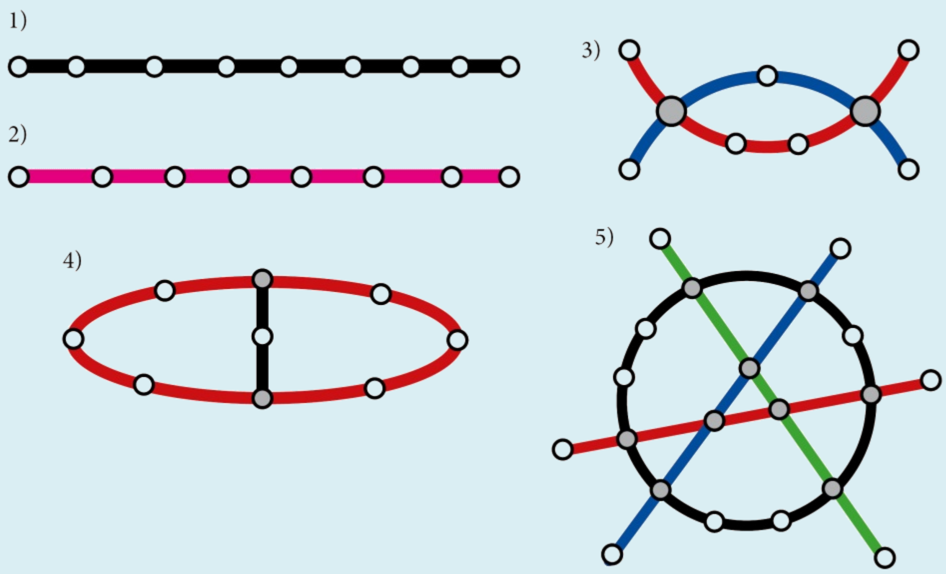



Рис. 2

*Ответ:* 1 – Аласан, 2 – Солитас, 3 – Альфоран, 4 – Коралио, 5 – Сан-Матео.

*Решение*. Зная протяженность линий и среднюю длину перегона между соседними станциями, найдем количество перегонов в каждом метрополитене и добавим эти данные в таблицу.

| Город | Общая протяженность линий, км | Количество станций | Средняя длина перегона, км | Количество перегонов | Номер схемы |
|---|---|---|---|---|---|
| Сан-Матео | 39 | 20 | 1,5 | $39:1,5=26$ | 5 |
| Коралио | 15 | 9 | 1,5 | 10 | 4 |
| Аласан | 16 | 9 | 2 | 8 | 1 |
| Альфоран | 18 | 9 | 2 | 9 | 3 |
| Солитас | 14 | 8 | 2 | 7 | 2 |

Зная количество перегонов между станциями, найдем подходящую схему и её номер тоже занесём в таблицу.

**5. Карточки (от 7 класса, 2 балла).** Когда Витя был первоклассником, у него была касса цифр с 12 карточками: две карточки с цифрой 1, две карточки с цифрой 2 и так далее до цифры 6. Витя выложил их на стол в ряд в случайном порядке слева направо, а затем убрал первую единицу, первую двойку, первую тройку и так далее. Например, если у Вити сначала была последовательность 434653625112, то получилась бы последовательность 436512. Какова вероятность того, что у Вити на столе осталась последовательность 123456?

*Ответ*: $\frac{1}{720}$.

*Решение*. Общее число последовательностей, которые мог выложить Витя из 12 карточек, равно

$$C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 66 \cdot 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1.$$

Найдем, сколько последовательностей после удаления шести карточек по правилу Вити дают результат 123456. Будем восстанавливать удаленные числа и выделять восстановленные жирным шрифтом. Удаленная единица могла стоять только перед оставшейся единицей:

$$\mathbf{1}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ .$$

Поставить на место удаленную двойку можно уже тремя способами:

$$\mathbf{2}\,\mathbf{1}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6, \quad \mathbf{1}\ \mathbf{2}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \quad \text{или} \quad \mathbf{1}\ 1\ \mathbf{2}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6.$$

В любом из этих случаев для стертой тройки ровно 5 равновозможных позиций. Рассуждая так и далее, получаем общее число способов восстановить цифры:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 45 \cdot 66} = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014$.

**6. Витины терзания (от 7 класса, 2 балла)**. У Вити в неделю пять уроков математики – по одному во все дни с понедельника по пятницу. Витя знает, что с вероятностью $1/2$ учитель во время учебной недели не проверит у него домашнее задание, а с вероятностью $1/2$ проверит, причем только на одном из уроков математики, зато не угадаешь когда – на любом уроке с равными шансами.

В конце урока математики в четверг Витя понял, что пока на этой неделе учитель так и не проверил у него домашнее задание. Какова вероятность того, что домашнее задание будет проверено в пятницу?

*Ответ:* $\frac{1}{6}$.

*Решение*. Построим дерево этого случайного опыта (рис.3).

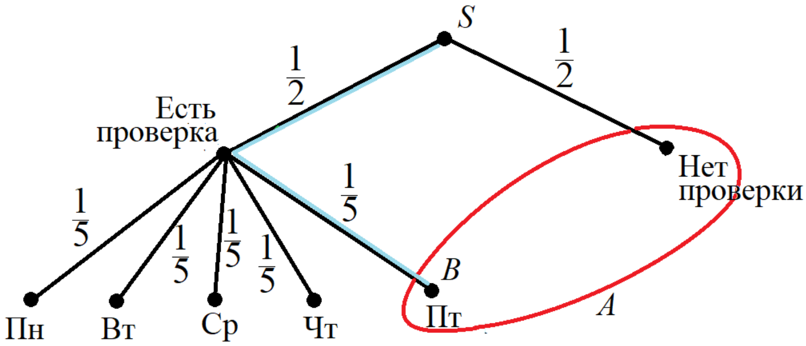



Рис. 3

Событие $A$ «домашнее задание не проверено вплоть до четверга» означает, что либо на этой неделе проверки не будет вовсе (цепочка $S-$ «Нет проверки»), либо проверка будет в пятницу (событие $B$, изображенное цепочкой $S-$«Есть проверка»$-$Пт). Требуется найти вероятность события $B$ при условии $A$, то есть «долю» цепочки $S-$Есть$-$Пт в событии $A$:

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(S-\text{Есть}-\text{Пт})}{\mathrm{P}(S-\text{Есть}-\text{Пт})+\mathrm{P}(S-\text{Нет})}=\frac{1/2\cdot 1/5}{1/2\cdot 1/5+1/2}=\frac{1}{6}.$$

**7. Шоссе (от 7 класса, 3 балла)**. Шоссе, идущее с запада на восток, пересекается с $n$ равнозначными дорогами, пронумерованными числами от 1 до $n$ по порядку. По этим дорогам с юга на север и с севера на юг едут машины. Вероятность того, что машина подъедет к шоссе по каждой из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Точно так же, вероятность того, что машина свернет с шоссе на каждую из дорог, равна $\frac{1}{n}$. Дорога, по которой машина покидает шоссе, не зависит от того, где эта машина въехала на шоссе.

Найдите вероятность того, что случайная машина, выехавшая на шоссе, минует $k$-й перекресток (проедет его насквозь или повернет на нем).

*Ответ:* $\dfrac{2kn-2k^2+2k-1}{n^2}$.

*Решение*. Указанное событие произойдет в одном из трех случаев.

1. Машина подъедет к шоссе по одной из дорог с номерами от 1 до $k-1$, а покинет шоссе по одной из дорог с номерами от $k$ до $n$. Вероятность этого $\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}$.

2. Машина подъедет по одной из дорог с номерами от $k+1$ до $n$, а покинет шоссе, повернув на одну из дорог с номерами от 1 до $k$. Вероятность этого $\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}$.

3. Машина повернет на шоссе с дороги с номером $k$.

Полная вероятность равна

$$\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2kn-2k^2+2k-1}{n^2}.$$

**8. Одинокий шарик (от 8 класса, 2 балла).** В 100 ящиков случайным образом кладут ровно 100 шариков. Какова вероятность того, что в последнем ящике окажется единственный шарик?

*Ответ:* прибл. 0,370.

*Решение*. Укладку шариков в ящики рассмотрим как серию из $n$ независимых испытаний Бернулли. Успехом будем считать попадание шарика в последний ящик. Вероятность ровно одного успеха равна

$$C_n^1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

Подставляя $n=100$, получаем $0,99^{99}\approx 0,3697$.

*Замечание*. Те, кто знаком с числом $e$ и знает, что $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^x$, могут убедиться в том, что с ростом $n$ число $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$ приближается к $\frac{1}{e}\approx 0,368$.

**9. Две товарищеские серии (от 8 класса, 2 балла)**. Две футбольные команды А. и Б. одинаково хорошо играют в футбол. Тренеры договорились о двух товарищеских матчах. За победу в матче команде дается 2 очка, за ничью — 1 очко, при поражении — 0 очков. Вероятность ничьей в каждой встрече одинакова и равна $p$.

На следующий год прошла аналогичная товарищеская серия из двух матчей. Команды играли в том же составе, они были по-прежнему равной силы, но вероятность $p$ выросла. Можно ли утверждать, что возросла вероятность того, что команды получат поровну очков?

*Ответ*. Нельзя.

*Решение*. В каждой встрече вероятности выигрыша и проигрыша каждой команды равны $(1-p)/2$. Обе команды наберут равные суммы очков, если оба матча закончились вничью или если в одном матче выиграла одна команда, а во втором – другая. Вероятность этого события можно представить как функцию $f(p)$, определенную на отрезке $[0;1]$:

$$f(p)=p^2+\frac{(1-p)^2}{2}=\frac{3p^2-2p+1}{4}.$$

На отрезке $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ квадратный трехчлен $3p^2-2p+1$ убывает. Поэтому при увеличении $p$ вероятность равного количества баллов может уменьшиться, а не вырасти.

**10. Таблетки от рассеянности (от 8 класса, 3 балла).** В январе доктор дал Рассеянному Ученому упаковку с 10 таблетками от рассеянности. Ученый хранит таблетки в шкафчике. Когда Ученого одолевает приступ рассеянности (а это бывает несколько раз в неделю в случайные моменты времени), он открывает шкафчик, берет с полочки упаковку, принимает таблетку и смотрит, сколько всего таблеток от рассеянности у него осталось. Если Ученый видит, что у него осталась только одна таблетка, он немедленно заказывает точно такую же новую упаковку в аптеке с моментальной доставкой и тут же кладет ее в тот же шкафчик на ту же полочку.

Если Ученый видит, что очередная упаковка опустела, он тут же ее выбрасывает в мусорное ведро.

Какова вероятность того, что в 10 часов утра 31 декабря у Рассеянного Ученого в шкафчике будет ровно две упаковки с таблетками от рассеянности?

*Ответ*: прибл. 0,1998.

*Решение*. Больше двух упаковок у Ученого быть не может ни в какой момент. Действительно, он заказывает новую упаковку только тогда, когда осталась всего одна таблетка, а значит, у него в этот момент одна упаковка. Поэтому в каждый момент у него либо одна упаковка, либо две упаковки, в одной из которых одна таблетка.

Будем считать, что в новой упаковке $n$ таблеток. После покупки новой упаковки общее число таблеток, хранящихся в упаковках, постепенно уменьшается с $n+1$ до 2 (приняв одну из двух последних таблеток, Ученый немедленно покупает новую упаковку, так что число таблеток моментально возрастает до $n+1$).

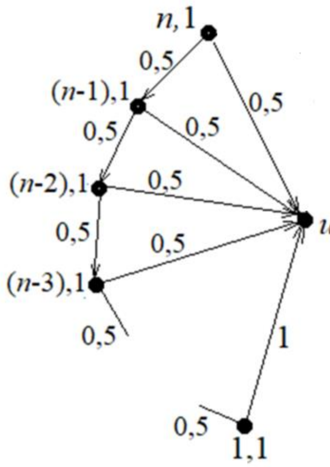


Рис.4

По прошествии длительного времени, скажем, в 10 часов утра 31 декабря, общее число таблеток может оказаться любым от 2 до $n+1$, причем с одинаковыми вероятностями, равными $p_k = \frac{1}{n}$ при $k = 2,...,n+1$, поскольку приступы рассеянности бывают в случайные моменты времени.

Ситуацию, когда в одной упаковке $k$ таблеток, а в другой 1 таблетка, будем называть *состоянием* $k,1$. Еще есть состояние $u$, которое возникает, если у Ученого только одна упаковка. 31 декабря вероятность состояния $n,1$ совпадает с вероятностью того, что у Ученого ровно $n+1$ таблетка: $\mathrm{P}(n,1) = p_{n+1} = \frac{1}{n}$.

Начав с состояния $n,1$, Ученый «перемещается» между состояниями по схеме, которая показана на графе (рис. 4). С помощью этого графа легко найти вероятности прочих состояний:

$$\mathrm{P}(n-1,1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(n,1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathrm{P}(n-2,1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(n-1,1) = \frac{1}{2^2 n}, \ \dots, \quad \mathrm{P}(1,1) = \frac{1}{2^{n-1} n}.$$

Вероятность события «у Ученого две упаковки» равна сумме вероятностей состояний от $n,1$ до $1,1$:

$$\mathrm{P}(n,1) + \mathrm{P}(n-1,1) + \ldots + \mathrm{P}(1,1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1} n}.$$

При суммировании использована формула суммы первых членов геометрической прогрессии.

При $n = 10$ искомая вероятность равна $\frac{1023}{5120} \approx 0{,}1998$.

**11. Три треугольника (от 8 класса, 3 балла).** Внутри треугольника $ABC$ выбирают случайную точку $M$. Какова вероятность, что площадь одного из треугольников $ABM$, $BCM$ и $CAM$ окажется больше суммы площадей двух других?

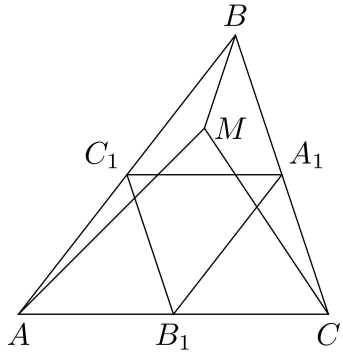


Рис.5

*Ответ*: 0,75.

*Решение*. Проведем в треугольнике средние линии $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $C_1A_1$. Чтобы площадь треугольника $ACM$ оказалась больше половины площади треугольника $ABC$, точка $M$ должна оказаться внутри треугольника $A_1BC_1$. Аналогично рассматриваются два других случая. Искомая вероятность равна

$$\frac{S_{AB_1C_1} + S_{B_1CA_1} + S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}.$$

**12. Стефан Банах[1] и спички (от 8 класса, 4 балла).** Неправдоподобная легенда гласит, что однажды в маленькой лавке в центре Львова Стефан Банах купил два коробка спичек и положил их в карман пиджака. В каждом коробке было 60 спичек.

Когда Банаху нужна спичка, он вынимает случайный коробок и берет из него спичку. В какой-то момент Банах достал коробок и обнаружил, что он пуст. Найдите математическое ожидание числа спичек в другом коробке.

*Ответ*: прибл. 7,795.

*Решение, предложенное участницей олимпиады Александрой Нестеренко*. Пусть в коробке $n$ спичек. Банах взял коробок (назовем его для определенности красным) и обнаружил, что коробок пуст. Банах знает, что красный коробок он брал $n$ раз, второй (синий) он мог брать $k$ раз, где $0 \le k \le n$. Если Банах брал второй коробок $k$ раз, в нем осталось $n-k$ спичек. Всего Банах брал спички из коробков $n+k$ раз с вероятностью взять спичку из синего коробка 0,5. Вероятность того, что второй коробок попался $k$ раз из $n+k$ испытаний, равна

$$C_{n+k}^{k} \cdot \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Следовательно, математическое ожидание количества спичек во втором коробке равно

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}.$$

Сумма $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}$ равна 1, поскольку это сумма вероятностей всех возможных исходов. Получается выражение

$$\mu = n - \sum_{k=0}^{n} \frac{kC_{n+k}^{k}}{2^{n+k}}.$$

Расчет можно провести по этой формуле с помощью электронных таблиц. Для $n = 60$ получается $\mu \approx 7,795$.

*Комментарий*. Решение можно продолжить и упростить полученное выражение. Преобразуем сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{kC_{n+k}^{k}}{2^{n+k}} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n+k}^{k-1}}{2^{n+k}} = (n+1)\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}}.$$

В последнем равенстве сделана замена $m = k-1$. Полученная сумма похожа на сумму $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+k}^{k}}{2^{n+k}} = 1$, переписанную для $n+1$. Отличие в верхнем пределе суммирования. Воспользуемся этим:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}} = \sum_{m=0}^{n+1} \frac{C_{n+1+m}^{m}}{2^{n+1+m}} - \frac{C_{2n+1}^{n}}{2^{2n+1}} - \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+2}}.$$

[1] Стефан Банах – крупнейший математик XX века. Один из создателей функционального анализа. Задача о вероятности определенного числа оставшихся спичек известна под названием задачи Банаха о спичках. О задаче сообщил Гуго Штейнгауз. (В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., «Мир», 1963, с.174).

Первое слагаемое, как мы знаем, равно 1, а $C_{2n+1}^{n+1}=\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$. Получаем:

$$\mu=n-(n+1)\cdot\left(1-\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}\right)=(n+1)\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}-1.$$

На рисунке 6 показан расчет по этой формуле с помощью электронной таблицы.

D2 $f_x$ =(D1+1)*ЧИСЛКОМБ(2*(D1+1);(D1+1))/2^(2*D1+1)-1

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | n= | 60 | |
| 2 | | | мю= | 7,79488245 | |
| 3 | | | | | |

Рис. 6

Можно сделать еще один шаг, используя формулу Стирлинга $m!\approx\sqrt{2\pi m}\frac{m^m}{e^m}$. Проверьте, что $\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+1}}\approx\frac{2}{\sqrt{\pi(n+1)}}$. Тогда $\mu\approx 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}-1$. Расчет по этой приближенной формуле дает $\mu\approx 7{,}813$, что весьма близко к истине.

**13. Чистая плоскость (от 9 класса, 3 балла).** Робот-пылесос “Orthogonal” решил пропылесосить координатную плоскость. Он выходит из точки $O$, расположенной в начале координат, и проходит по прямой расстояние $X_1$. В точке, куда он пришел, пылесос поворачивается и описывает окружность с центром в начале координат. Завершив окружность, он, не меняя направления, проходит по прямой расстояние $X_2$. Затем он снова поворачивается боком к началу координат, чтобы снова описать окружность с центром в начале координат, а завершив ее, проходит по прямой расстояние $X_3$. Таким образом он действует и дальше. Известно, что величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$ подчиняются некоторому распределению с математическим ожиданием $a$ и дисперсией $d$. Найдите математическое ожидание площади круга, ограниченного $n$-й окружностью, по которой прошел пылесос.

*Ответ*: $\pi n(d+a^2)$.

*Решение*. Исключим окружности из траектории пылесоса. Получается, что в каждой точке, куда он пришел после очередного шага, пылесос поворачивается так, что направление его движения образует прямой угол с направлением на начало координат (рис. 7). Поэтому после $n$-го шага квадрат расстояния $R$ от пылесоса до начала координат можно найти по теореме Пифагора:

$$R^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2.$$

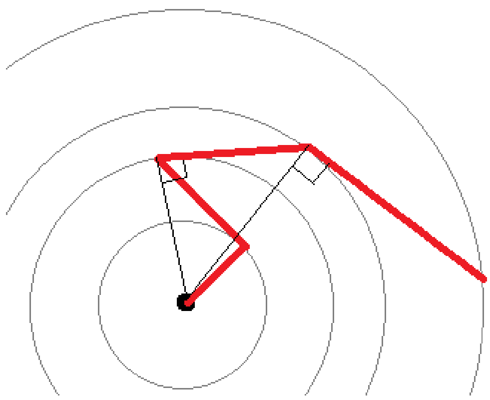


Рис. 7

Площадь круга, ограниченного $n$-й окружностью, равна

$$S=\pi R^2=\pi\left(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2\right).$$

Поэтому

$$\mathrm{E}\,S=\pi\left(\mathrm{E}\,X_1^2+\ldots+\mathrm{E}\,X_n^2\right)=\pi n\,\mathrm{E}\,X_1^2=\pi n\left(\mathrm{D}\,X_1+\mathrm{E}^2\,X_1\right)=\pi n\left(d+a^2\right).$$

**14. Лепидоптеролог (от 9 класса, 4 балла).** Закончив писать книгу о степенных средних, Рассеянный Ученый решил заняться лепидоптерологией, то есть изучением бабочек. Он взял сачок и отправился на Суматру, где водится ровно $n$ видов бабочек. Когда Ученый видит бабочку, он накрывает ее сачком, а уже потом рассматривает, поскольку зрение у Ученого не очень хорошее.

Пойманная бабочка может оказаться $j$-го вида с вероятностью $p_j$, где $j=1,...,n$. Если бабочку такого вида Ученый еще не видел, то он ее тщательно измеряет, взвешивает, фотографирует, описывает и отпускает на волю. Если же бабочка такого вида уже встречалась, то Ученый отпускает ее сразу и ищет следующую бабочку.

Покажите, что через три дня такой охоты математическое ожидание числа видов бабочек, недостающих в описании Ученого, будет минимально возможным, если все вероятности $p_j$ равны между собой.

*Доказательство*. Предположим, что за эти 3 дня Ученый поймал и отпустил всего $k$ бабочек ($k>1$). Пусть $q_j=1-p_j$ – вероятность того, что пойманная бабочка принадлежит к виду, отличному от вида $j$. Очевидно, $q_1+q_2+\ldots q_n=n-1$. Введем индикаторы событий:

$$I_k=\begin{cases}1, \text{ если среди первых } k \text{ бабочек бабочки вида } j \text{ не было,}\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Математические ожидания индикаторов найти несложно: $\mathrm{E}I_j=q_j^k$.

Количество недостающих бабочек $X$ равно сумме всех индикаторов. Перейдем в этой сумме к математическому ожиданию:

$$\mathrm{E}X=\mathrm{E}(I_1+I_2+...+I_n)=q_1^k+q_2^k+...+q_n^k.$$

Воспользуемся неравенством о средних (среднее степенное степени $k>1$ не меньше, чем среднее арифметическое):

$$\sqrt[k]{\frac{q_1^k+q_2^k+...+q_n^k}{n}}\ge\frac{q_1+q_2+...+q_n}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Поэтому $\mathrm{E}X\ge n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все $q_j$ равны между собой, и, значит, все $p_j$ тоже одинаковы.

**15. Наименьшая сумма (от 9 класса, 4 балла).** Есть очень много симметричных игральных кубиков. Их бросают одновременно. При этом с некоторой вероятностью $p>0$ может получиться сумма очков 2022. Какова наименьшая сумма очков, которая может выпасть при бросании этих кубиков с той же вероятностью $p$?

*Ответ*: 337.

*Решение*. Распределение суммы, выпавшей на кубиках, симметрично. Чтобы сумма $S$ была наименьшей возможной, сумма 2022 должна быть наибольшей возможной. Значит, сумма 2022 достигается при выпадении шестерок на всех кубиках. Следовательно, кубиков всего $2022:6=337$. Наименьшая сумма 337 получается, если на всех кубиках выпадут единицы.

**16. Лишние крокодилы (от 9 класса, 6 баллов).** Производитель шоколадных яиц с игрушкой внутри объявил, что выпускается новая коллекция, в которой десять разных крокодилов. Крокодилы равномерно и случайно распределены по шоколадным яйцам, то есть в случайно выбранном яйце каждый из крокодилов может оказаться с вероятностью 0,1. Леша захотел собрать полную коллекцию. Каждый день мама покупает ему одно шоколадное яйцо с крокодилом.

Сначала в коллекции Леши появился крокодил в очках, затем – крокодил с газетой. Третьим экземпляром, какого не было прежде, стал крокодил с тростью. Найдите математическое ожидание случайной величины «количество крокодилов с тростью, которые оказались у Леши к моменту, когда у него образовалась полная коллекция».

*Ответ*: прибл. 3,59.

*Решение*. Будем считать, что всего в коллекции $n$ крокодилов. Пронумеруем экспонаты в том порядке, в каком они появлялись в коллекции. Например, крокодил в очках был первым, поэтому это крокодил вида 1. Через какое-то количество попыток появился крокодил вида 2, какого еще не было (с газетой), и так далее.

Рассмотрим момент, когда в коллекции появился $k$-й крокодил. Нас интересует математическое ожидание количества крокодилов этого же вида, которые будут куплены до завершения коллекции.

Начиная с момента, когда появился $k$-й крокодил, потребуется $\varphi_k$ покупок, чтобы появился следующий отсутствующий доныне экспонат (номер $k+1$). Вероятность того, что он появится в каждой отдельной попытке, равна $\frac{n-k}{n}$. Поэтому $\mathrm{E}\,\varphi_k = \frac{n}{n-k}$, а количество появившихся попутно «лишних» крокодилов будет равно в среднем

$$\mathrm{E}\,\varphi_k - 1 = \frac{n}{n-k} - 1 = \frac{k}{n-k}.$$

Из этих лишних $\frac{k}{n-k}$ крокодилов сколько-то (пусть $\xi_k$) принадлежит виду $k$, а поскольку в каждой попытке каждый из $k$ видов лишних крокодилов появляется с равными шансами,

$$\mathrm{E}\,\xi_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{n-k} = \frac{1}{n-k}.$$

Аналогично, между экспонатами номер $k+1$ и $k+2$ появится в среднем

$$\mathrm{E}\,\varphi_{k+1} - 1 = \frac{n}{n-k-1} - 1 = \frac{k+1}{n-k-1}$$

лишних крокодилов, из них в среднем $\mathrm{E}\,\xi_{k+1} = \frac{1}{n-k-1}$ относятся к виду $k$, и так далее.

Следовательно, общее число $X_k$ лишних крокодилов вида $k$ равно

$$X_k = \xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2} + \ldots + \xi_{n-1},$$

а математическое ожидание этой величины равно

$$\mathrm{E}\,X_k = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k-1} + \ldots + 1 = H_{n-k},$$

где буквой $H$ обозначено гармоническое число: $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$.

Добавляя ко всем этим лишним крокодилам $k$-го вида первого такого крокодила, (нелишнего), находим, что среднее число таких крокодилов равно $H_{n-k} + 1$.

В условиях задачи $n = 10,\ k = 3$, поэтому ожидаемое число крокодилов с тростью, то есть крокодилов 3-го вида, равно $H_7 + 1 \approx 2,59 + 1 = 3,59$.

*Замечание*. Известно, что $H_m \approx \ln m + \gamma$, где $\gamma = 0,577\,215\,664\ldots$ — константа Эйлера-Маскерони. Пользуясь этой формулой, найдем:

$$\mathrm{E}\,X_k + 1 \approx \ln 7 + 0,578 + 1 \approx 3,524.$$

Точность приемлемая.

**Александра Нестеренко**

*Эссе на тему*
*Правильная многогранная кость*

### 1. Начнем с пятигранника

Можно ли сделать пятигранную кость, у которой вероятность падения на любую из граней 1/5? Пятигранников всего два вида[1]:

1. С четырьмя треугольными и одной четырехугольной гранями.
2. С двумя треугольными и тремя четырехугольными гранями.

Лучшими кандидатами на кости с вероятностью 1/5 кажутся прямые призма и пирамида. У них некоторые грани неразличимы, и вероятности падения на эти грани равны автоматически. Только прямые пятигранники и будем дальше рассматривать.

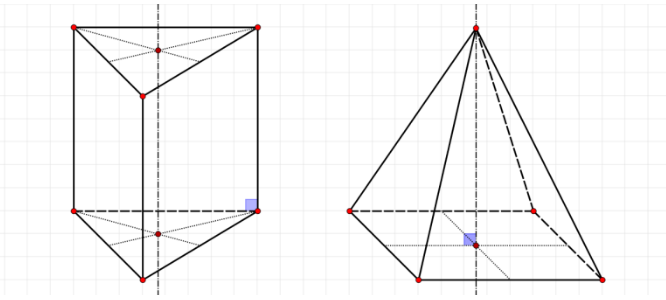


Рис. 1

Возьмем кость в форме призмы, сделанную из однородного материала. Благодаря симметрии основания призмы неразличимы, поэтому вероятность падения на одно основание равна вероятности падения на другое. Так же равны вероятности падения на каждую из боковых прямоугольных граней. Трудность в том, что вероятности падения на основания и боковые грани не обязаны быть одинаковыми.

Начнем с призмы с очень большой высотой по отношению к стороне основания. Для такой кости вероятность падения на основание близка к нулю, а вероятность падения на боковую грань чуть меньше, чем 1/3.

Будем непрерывно уменьшать отношение высоты к основанию. В конце концов получится почти плоская треугольная монета с вероятностью падения на основания, близкой к $1/2$, и близкой к нулю вероятностью оказаться лежащей на боковой грани.

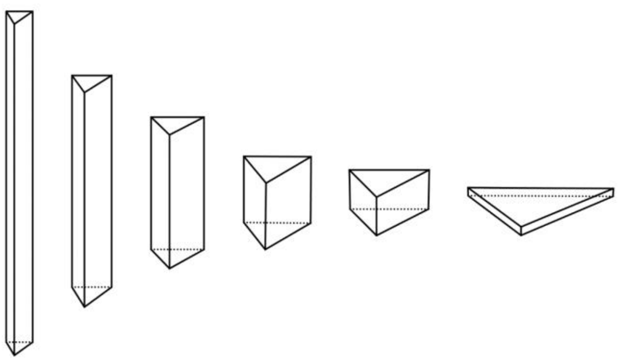


Рис. 2

[1] Этот факт не очевиден, но его можно доказать. Доказательство выходит за рамки эссе. Прим. оргкомитета.

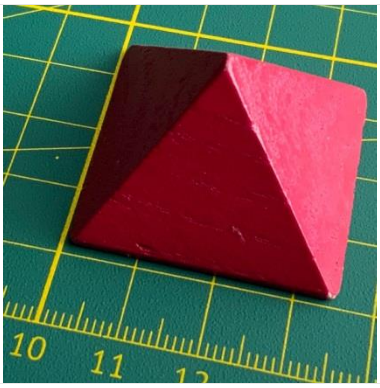
Где-то между этими крайними случаями должен быть такой, при котором вероятность падения на основание равна вероятности падения на боковую грань, и эта вероятность 1/5.

Аналогичное рассуждение можно применить и к пирамиде.

Кажется, кости с вероятностью граней 1/5 найдены, причем сразу двух видов. На самом деле, наверное, нет. Настоящая, правильная, «честная» игральная кость (как кубик), должна давать одинаковые вероятности граней всегда. На это не должны влиять ни сила броска, ни его направление, ни свойства поверхности, на которую падает кость. Так ли это для пятигранников?

## 2. Эксперимент с пятигранником

Для эксперимента нашлась деревянная пирамидка с квадратным основанием.



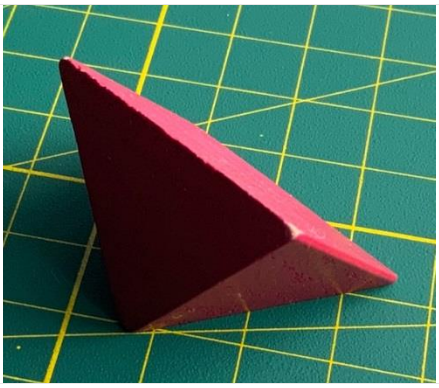



Рис. 3. Пирамидка с квадратным основанием 35 мм x 35 мм и высотой 22 мм.

Для того чтобы управлять силой бросков и при этом сохранить их случайность, использовался специально изготовленный «рандомизатор».

Рандомизатором послужила вертикальная труба с горизонтально натянутыми внутри нее капроновыми нитками. Длина трубы 57 см, внутренний диаметр 10 см. Десять горизонтальных нитей натянуты с шагом примерно 5 см, так что расстояние от первой до последней 47 см.

Вид сквозь рандомизатор

Рандомизатор подвешен в 5 см над ковром

Рис. 4

Пирамидка отпускалась в рандомизатор на уровне верхнего среза, и после нескольких столкновений с нитями и стенками вылетала из нижнего среза. Меняя высоту рандомизатора над поверхностью можно менять энергию пирамидки перед ударом.

В первой серии экспериментов пирамидка падала на ковер, тем самым моделируя неупругий удар. Высота нижнего среза трубы над полом была 5 см. Во второй серии – на лист текстолита толщиной 8 мм, нижний срез трубы был над ним на высоте 18 см. Так моделировался упругий удар. Подсчитывалось число «успехов», когда пирамидка останавливалась на квадратном основании[2].

Табл. Результаты серий бросков

| **Серия №** | **1** | **2** |
|---|---|---|
| Поверхность | Ковер | Текстолит |
| Высота | 5 см | 18 см |
| Количество испытаний $N_0$ | 870 | 360 |
| Количество успехов $N$ , | 326 | 157 |
| Частота успеха $f = N/N_0$ | 0,37 | 0,44 |
| Выборочная оценка стандартного отклонення вероятности успеха $\sqrt{\frac{f(1-f)}{N_0}}$ | 0,016 | 0,026 |

Во втором эксперименте вероятность успеха оказалась больше на 0,07.

Так как серии независимы, дисперсии складываются, и стандартное отклонение разности вероятностей равно $\sqrt{0,016^2+0,026^2} \approx 0,031$. Найденная в эксперименте разность частот в 2,3 раза больше стандартного отклонения. Поэтому расхождение в частотах вряд ли может быть случайным[3].

### 3. Почему вероятность может зависеть от условий бросков

В первой серии бросков, пирамидка падала с малой высоты на ковер, почти не отскакивала после удара и останавливалась в нескольких сантиметрах от места падения. Такой удар, видимо, можно считать близким к неупругому (при абсолютно неупругом ударе пирамидка бы сразу «прилипала» к поверхности).

В книге Ф. Мостеллера «50 занимательных вероятностных задач» разбирается задача о «толстой монете». Там обосновано, что если удар абсолютно неупругий, то вероятность падения на грань – это отношение телесного угла, под которым эта грань видна из центра тяжести, к полному телесному углу.

[2] Чтобы уменьшить возможное влияние износа пирамидки и рандомизатора со временем (например, натяжение нитей могло меняться), серии чередовались: 180 бросков первой серии, потом 180 второй, 330 первой, 180 второй и 360 первой.

[3] Проделанное Александрой рассуждение – сравнение разности частот со стандартным отклонением этой разности можно считать разновидностью теста Стьюдента при проверке гипотезы «разность частот обусловлена случайными отклонениями». Автор не использует критическую точку распределения Стьюдента, но справедливо полагает, что отличие в 2,3 раза - это большое отличие, и оно дает право считать такую разность неслучайным явлением. – Прим. оргкомитета олимпиады.

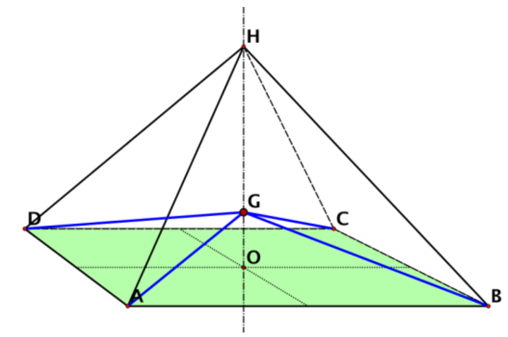



Рис. 5

Центр тяжести G пирамиды находится на расстоянии в четверть высоты от основания (рис.5). При помощи теоремы косинусов и теоремы Люилье https://ru.wikipedia.org/wiki/Телесный_угол, можно вычислить телесные углы, под которыми из центра тяжести пирамидки видны ее грани и основание. Телесный угол основания равен:

$$\Omega_b = 4{,}57 \text{ стерадианов.}$$

Тогда, для абсолютно неупругого удара, вероятность, что пирамидка упадет основанием вниз:

$$P_{неупр} = \frac{\Omega_b}{4\pi} \approx \frac{4,57}{12,56} = 0,36.$$

Хорошее совпадение с результатом измерений 0,37.

Во второй серии, когда пирамидка падала с большей высоты на твердый текстолитовый лист, она отскакивала после первого удара на несколько сантиметров вверх, и останавливалась в нескольких десятках сантиметров от места первоначального падения. Удар нельзя считать неупругим, энергия пирамидки гасится постепенно.

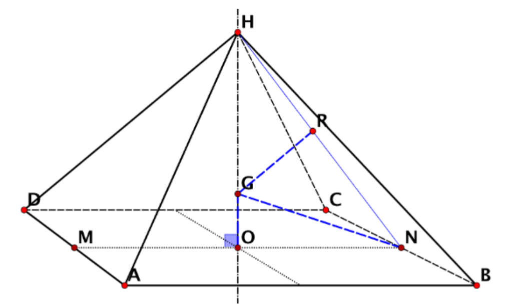



Рис. 6

Расстояния от центра тяжести пирамиды с основанием 35 мм $\times$35 мм и высотой $OH$ = 22 мм до граней:

$h_1 = GO = 5.5$ мм;
$h_2 = GR = 10.3$ мм;
до ребра $BC$:
$h = GN = 18.3$ мм

На рисунке 7 показано несколько положений пирамидки.

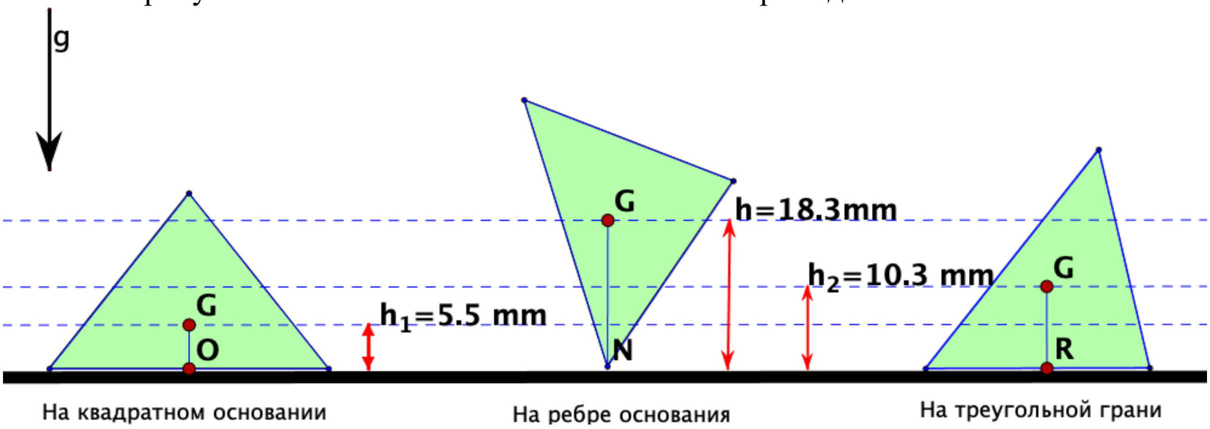



Рис. 7

Если пирамидка лежит на квадратном основании, ее центр масс ниже, чем если она лежит на треугольной грани. Положение на основании устойчивее.

Когда пирамидка отскакивает и катится по поверхности, для переворота с основания на боковую грань ей нужна кинетическая энергия $E_1 > mg(h - h_1)$, для переворота в обратную сторону $E_2 > mg(h - h_2)$.

Так как $E_1 > E_2$, может случиться так, что кинетической энергии достаточно только для переворота с боковой грани на основание. Но если возможен переворот с основания на боковую грань, то всегда возможен и обратный.

Поэтому при упругом падении шансов оказаться на основании у пирамидки больше, чем при неупругом. Так и получилось в эксперименте.

Разность вероятностей $P_{упр} - P_{неупр}$ должна расти с разностью высот $h_2 - h_1$. Если разность высот меняет знак, разность вероятностей должна менять знак тоже. Можно предположить линейную зависимость:

$$P_{упр} - P_{неупр} \sim h_2 - h_1$$

Разность вероятностей безразмерна, значит и справа должно быть безразмерное выражение. Разность высот надо разделить на еще какую-то длину, связанную с пирамидкой. Так, чтобы при увеличении пирамиды без изменения ее формы, разность вероятностей не менялась.

Делить надо, наверное, на высоту подъема центра тяжести, которая нужна для переворота. Чем больше эта высота, тем труднее перевернуться и тем меньше будет значить различие между $h_2$ и $h_1$.

У нас два таких кандидата в знаменатели: $h - h_1$ и $h - h_2$. Как выбрать не ясно, поэтому возьмем среднее арифметическое:

$$P_{упр} = P_{неупр} + C\frac{h_2 - h_1}{h - \frac{1}{2}(h_2 + h_1)} \qquad (1)$$

Для данных из эксперимента безразмерный коэффициент $C$ оказался приближенно равен 0,15

Получается, что есть, по крайней мере, два необходимых условия для «честной» многогранной кости, вероятность падения которой на любую грань одинакова независимо от условий броска.

1. Все грани должны быть видны из центра тяжести под равными телесными углами.
2. Центр тяжести должен быть равноудален от граней.

## 4. Могут ли правильные пятигранники быть «честными» костями

Отношение высоты к стороне основания правильного пятигранника можно подобрать так, чтобы любую грань было видно из центра тяжести под телесным углом $4\pi/5$. При неупругом падении таких пятигранников вероятность падения на любую грань будет 1/5. Результаты в таблице.

| Пятигранник | $H/a$ | $h_1/a$ | $h/a$ | $h_2/a$ | $P_{неупр}$ | $P_{упр}$ | $\frac{P_{упр}-P_{неупр}}{P_{неупр}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Прямая пирамиды | 1,67 | 0,42 | 0,65 | 0,36 | 0,20 | 0,17 | -17 % |
| Прямая призма | 0,53 | 0,27 | 0,39 | 0,29 | 0,20 | 0,23 | 14 % |

$H$ – высота пятигранника,

$a$ – сторона основания,
$h_1$ – расстояние от центра масс до основания,
$h$ – расстояние от центра масс до ребра основания,
$h_2$– расстояние от центра масс до боковой грани,
$P_{\text{неупр}}$- вероятность остановиться на основании при абсолютно неупругом падении,
$P_{\text{упр}}$ – вероятность остановиться на основании при упругом падении.

$P_{\text{упр}}$ в таблице – это оценка по формуле (1). Использовался коэффициент $C$, найденный из эксперимента.

Мы попытались найти прямой пятигранник с вероятностью падения на любую грань 1/5. Получилось, что вероятность падения на основание такого пятигранника может существенно меняться в зависимости от условий бросков. Вряд ли это можно назвать честной игральной костью.

Прямой пятигранник честной игральной костью быть не может[4].

Интересно, может ли найтись произвольный (не прямой) пятигранник, у которого все грани видны из центра тяжести под одинаковыми телесными углами и центр тяжести равноудален от всех граней? Мне кажется, скорее нет. Не у всех многогранников вообще есть внутренняя точка, из которой грани видны под одинаковыми углами. И не у всякого многогранника точка центра масс равноудалена от граней. А нужно, чтобы эти две точки не только были, но и совпадали.

## 5. Многогранники с шансами падения на любую грань $1/N$ для четных $N$

Конечно, есть пять правильных многогранников, из которых автоматически получатся «честные» кости с $N$ = 4, 6, 8, 12, 20. Правильный многогранник можно вписать в сферу, и на каждой грани как на основании построить прямую пирамиду с вершиной на сфере так, чтобы вершина пирамиды и центр сферы были по разные стороны от плоскости грани.

Получатся еще честные кости с числом граней $N$ = 12, 24, 24, 60 и 60.

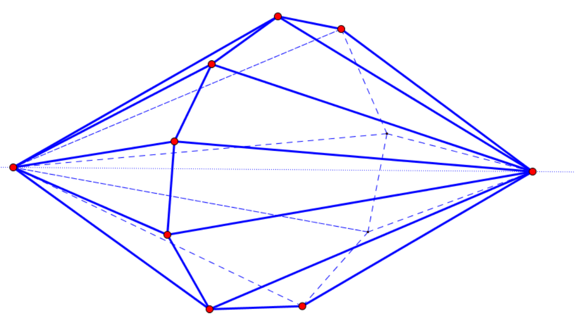


Рис. 8

Более универсальный способ – взять две одинаковые прямые пирамиды с правильными $M$-угольниками в основаниях, и сложить их основание к основанию. Получится $2M$ -гранное «веретено» с неразличимыми гранями (рис. 8).

Раз грани неразличимы, кость должна быть честной, то есть вероятность выпадения на любую грань равна $1/N$ независимо от условий, при которых проводятся бросания.

Но у такого «веретена» обязательно четное количество граней $N \geq 6$.

---

[4] По древней традиции неоднородные многогранники, например со свинцовыми дробинками внутри, «честными» не считаются.

## 6. Многогранники с шансами падения на любую грань $1/N$ для $N$, кратных трем и не меньших, чем 9

Можно предложить конструкцию многогранника с вероятностью падения на грань $\frac{1}{3M}$, где $M = 3, 4, 5, \ldots$.

Например, при $N = 9$ такой многогранник – это прямая призма с основаниями из правильных треугольников и построенными на этих основаниях одинаковыми прямыми тетраэдрами (рис. 9). Выберем отношение высоты призмы к стороне ее основания так, чтобы основания призмы были видны из ее центра под телесным углом $\frac{4\pi}{3}$ стерад. Тогда боковые грани призмы и тетраэдров автоматически (из-за вращательной симметрии с осью $AA_1$) видны из центра тяжести под одинаковыми телесными углами. Причем высоты тетраэдров можно менять как угодно, равенство телесных углов сохранится.

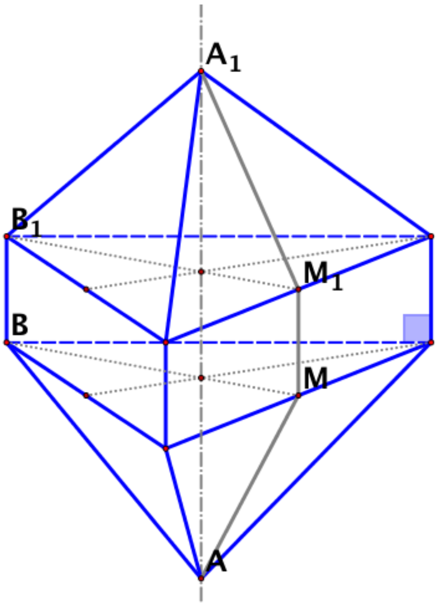
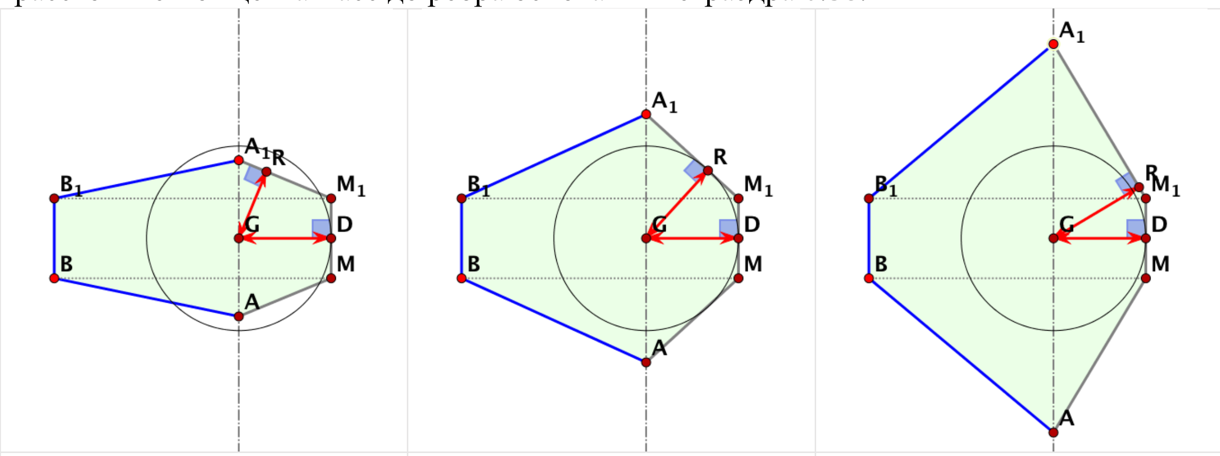


Рис. 9

Высота призмы при этом оказывается равна приблизительно четверти стороны основания. У прямой призмы с правильным треугольником со стороной 1 в основании и высотой 0,25, расстояние от центра масс до основания равно 0,125, до боковой грани 0,31,до ребра основания 0,38.

Так как тетраэдры равны, центр масс всего девятигранника совпадает с центром масс призмы при любой высоте тетраэдров. Поэтому расстояние от центра масс девятигранника до граней призмы, а так же телесные углы, под которыми грани призмы видны из центра масс, не зависят от высоты тетраэдров.

Вначале пристроим на основания призмы тетраэдры нулевой высоты. Тогда расстояние от центра масс до граней тетраэдра 0,125. Будем непрерывно увеличивать высоту тетраэдров. В какой-то момент расстояние от центра масс до грани тетраэдра сравняется с расстоянием от цента масс до ребра основания тетраэдра 0.38.




| $GR < GD$ | $GR = GD$ | $GR > GD$ |
|---|---|---|

Рис. 9

Где-то между этими положениями обязательно найдется высота, при которой расстояние до грани тетраэдра *GR* равно расстоянию до боковой грани призмы *GD*.

Найден многогранник с различимыми гранями, но у которого центр масс равноудален от всех граней и все грани из центра масс видны под одинаковым телесным углом.

Такой многогранник не обязательно будет идеально «честным»[5]. Но можно надеяться, что вероятность упасть на грань будет зависеть от условий броска меньше, чем в случае прямых пятигранников.

## Комментарий оргкомитета

Эссе глубочайшее. Быстро разыскав общие способы построения костей с равными вероятностями граней при бросании (честных костей), автор заостряет внимание на физической стороне вопроса: останется ли честная кость для рыхлой поверхности честной, если ее бросать на твердую поверхность. Причина разного поведения костей на разных поверхностях в неправильности геометрической формы. Инерция вращательного движения приводит к тому, что при неупругом и упругом (с отскоком) ударе одна и та же кость будет вести себя по-разному. Исследуя этот вопрос, Александра Нестеренко формулирует утверждение: «*…по крайней мере, два необходимых условия для «честной» многогранной кости, вероятность падения которой на любую грань одинакова независимо от условий броска.*

3. *Все грани должны быть видны из центра тяжести под равными телесными углами.*
4. *Центр тяжести должен быть равноудален от граней*».

Заметим, что автор не утверждает, что это достаточные условия, подчеркивая, что эти условия только необходимые. Их недостаточность явствует, например, из того, что при упругом ударе рассматриваются только перекатывания «через ребро», а не «через вершину».

И даже последнее построение честных костей с числом граней, кратным 3, не удовлетворяет Александру полностью опять же из-за возможных перекатываний через вершину. Здесь автор просто ссылается на то, что «вращение предмета может быть удивительно сложным и даже причудливым».

Эссе является ярким образцом умелого и гармоничного сплетения геометрии и механики.

[5] Вращение предмета может быть удивительно сложным и даже причудливым. Как, например, на https://www.youtube.com/watch?v=N9HlQ-XVnFk. Эффект Джанибекова на видео объясняется разными моментами инерции для вращения вокруг разных осей. Многогранник вращается в полете, потом катится по столу. Если у него разные моменты инерции, не скажется ли это на вероятностях граней?

## XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

*Лучшее эссе на тему «Двойное округление»*

### Петрина София (Москва, 8 класс)

Годовые, четвертные оценки являются важным показателем для всех учеников. Но всегда ли они справедливы? Может ли случиться так, что оценка завышена или занижена? Для ответа на эти вопросы давайте разберемся, как это работает.

Выглядит эта система как пирамида – текущие оценки ученика за четверть усредняются, и выставляется четвертная. Затем, в конце года берутся все четвертные оценки ученика, вычисляется их среднее арифметическое, и получается годовая оценка. Но все мы понимаем, что одна и та же четверка может быть на самом деле 3,5 или 4,4.

Есть такой параметр как истинное среднее всех текущих оценок – здесь просто находится среднее от всех оценок ученика за год. Может ли случится так, что отличие истинного среднего от годовой оценки будет больше 0.5? То есть ученику в году выставят несправедливую оценку? Например, в году у него вышло 4 балла, но истинное среднее у него меньше, чем 3.5? Да, может! В обычной ситуации такого, конечно же, не будет. Однако, что если мы возьмем некую крайнюю точку?

Например, в четвертях у ученика были оценки 3, 3, 3, и 5. Тогда в году у ученика вышло 3,5. Но, чтобы сделать истинное среднее как можно меньше, используем самые минимальные отметки. А именно, $3=\lceil 2,5 \rceil$; $5=\lceil 4,5 \rceil$. Посмотрим, что получится[1]. Годовая оценка: $\lceil 3,5 \rceil = 4$.

| 1 четверть | 2 четверть | 3 четверть | 4 четверть |
|---|---|---|---|
| 3 3 2 2 | 4 2 2 2 | 3 3 2 2 | 5 5 5 3 |
| Итоговая: 3 | Итоговая: 3 | Итоговая: 3 | Итоговая: 5 |

Но если мы посчитаем истинное среднее всех оценок, то мы увидим, что годовая оценка несправедлива:

[1] Символами $\lfloor\ \rfloor$ и $\lceil\ \rceil$ мы, следуя нотации Айверсона, обозначаем соответственно округление вниз вверх до ближайшего целого. Прим. оргкомитета.

$$\frac{3+3+2+2+4+2+2+2+3+3+2+2+5+5+5+3}{16}=3.$$

Годовая четверка на деле оказалась тройкой. Разница между истинным средним и годовой составила ровно 1.

В вышеприведенном примере годовая оценка оказалась выше, чем истинное среднее. Поставим вопрос по-другому: может ли она быть ниже?

Теперь возьмем не минимальные, а максимальные значения. Тройка у нас будет 3,4, а четверка 4,4. Годовая оценка: $\lfloor 3,25 \rfloor = 3$.

| 1 четверть | 2 четверть | 3 четверть | 4 четверть |
|---|---|---|---|
| 4 3 4 2 4 | 4 3 4 2 4 | 4 3 4 2 4 | 5 5 5 5 2 |
| Итоговая: 3 | Итоговая: 3 | Итоговая: 3 | Итоговая: 4 |

Но истинное среднее равно

$$\frac{4+3+4+2+4+4+3+4+2+4+4+3+4+2+4+5+5+5+5+2}{20}=3,65.$$

То есть на самом деле ученик имеет 4, но из-за двойного усреднения он получил 3.

Таким образом, возникает следующий вопрос: каким может быть наибольшее отклонение в ту или иную сторону?

Предположим, что мы не ограничены в количестве оценок в одной четверти. Тогда у нас может быть ситуация, когда одна четвертная оценка будет иметь больший вес.

Например, оценки в четвертях у ученика 2, 5, 5, и 5. Тогда среднее равно 4,25, годовая 4. Однако предположим, что в первой четверти у него было 2000 оценок (может быть любое большое число), и все они двойки. При этом в остальных трех четвертях было всего лишь по одной оценке и каждая из них это пятёрка.

Тогда при вычислении истинного среднего мы имеем следующий результат:

$$\frac{2\cdot 2000+5+5+5}{2003}= 2,0045,$$

то есть годовая равна 2. Таким образом, максимальная разница составляет 2 балла.

Эксперимент будет таким же в случае, если оценки будут 2, 2, 2, 5, при большом количестве пятерок. Тогда в году выйдет 3 (2,75 средняя четвертная), а большое количество пятёрок потянет истинное среднее к 5 (4,9956). Разница также составляет 2 балла.

## *Комментарий оргкомитета*

Несколько участников олимпиады прислали нам эссе по поводу двойного округления школьных оценок. Тема оказалась животрепещущей. Были гораздо более подробные эссе, чем довольно лаконичная работа Софии Петриной. Однако именно эта работа оказалась наиболее интересной с точки зрения оценки наибольшей возможной разности между истинным средним и результатом двойного округления. По сути, София почти доказала, что отклонение при шкале от 2 до 5 баллов теоретически может достигать значения 2, причем как в большую, так и в меньшую сторону.

По этой причине это эссе признано лучшим по этой теме, и за него София получает 7 баллов из 10, что приносит ей 2-е место в конкурсе эссе.

## XV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

### *Возможные идеи эссе на тему «Странная игра Рекенталера»*

Пусть в какой-то момент игрок имеет капитал $X$, вложенный в игру. При успехе (орел) капитал игрока становится равен $1,6X$, а при неудаче – уменьшается на 40%, то есть становится равен $0,6X$. Таким образом, математическое ожидание результата одной игры равно

$$\frac{1}{2}\cdot 1,6X+\frac{1}{2}\cdot 0,6X=1,1X.$$

Значит, вложив один доллар, через $n$ бросаний монеты (циклов игры), игрок в среднем будет иметь $1,1^n$ долларов, что довольно много. Действительно, уже через 100 циклов, математическое ожидание капитала будет $\$1,1^{10}$, то есть 13 780 долларов и 61 цент. Таким образом, ответ на первый вопрос утвердительный – да, при большом числе циклов математическое ожидание выигрыша положительное и большое, поскольку растет в геометрической прогрессии со знаменателем 1,1.

В силу закона больших чисел игроки будут в среднем находиться в выигрыше. И даже один игрок будет обязательно в какие-то моменты игры находиться в выигрыше, поскольку его капитал при увеличении $n$ с большой вероятностью будет близок к $1,1^n$ долларам.

Какая доля игроков потеряет почти все деньги за $n$ циклов? Или, если мы говорим об одном игроке, то какова вероятность, что он через $n$ циклов разорится, то есть потеряет все до цента?

Последовательность циклов игры представляет собой серию испытаний Бернулли, и вероятность того, что капитал $X_n$ через $n$ циклов окажется не больше, чем 1 цент (интерпретируем выражение «до цента» буквально), равна

$$\mathrm{P}\left(X_n\le \$0,01\right)=\sum_k C_n^k\frac{1}{2^n}, \qquad (1)$$

где суммирование ведется по всем $k$, при которых $1,6^k\cdot 0,6^{n-k}\le 0,01$. Найдем эти $k$. Из неравенства (1) получаем:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^k\le 0,01, \text{ откуда}$$

$$k\le \log_{\frac{8}{3}}\left(0,01\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)=\left(n\lg\frac{5}{3}-2\right):\lg\frac{8}{3}\approx 0,521n-4,695. \qquad (2)$$

Тогда «граница разорения», то есть наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству (2), равно

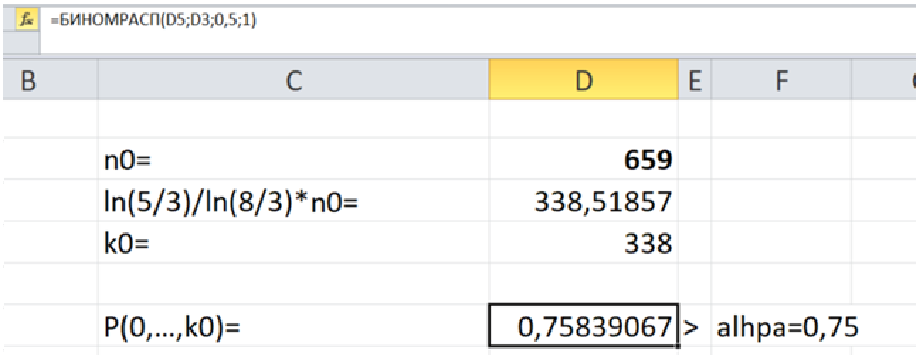
$$k_0(n) = \left[\left(n \lg\frac{5}{3} - 2\right) : \lg\frac{8}{3}\right] > 0{,}52n - 6$$

(квадратные скобки означают взятие целой части).

Зададим некоторую большую вероятность $\alpha$. Число успешных циклов игры имеет биномиальное распределение, которое обладает тем свойством, что для всех $n$, начиная с некоторого выполняется неравенство

$$\mathrm{P}\left(X_n \le \$0{,}01\right) = \sum_{k=0}^{k_0(n)} C_n^k \frac{1}{2^n} > \alpha. \tag{3}$$

Иными словами, при достаточно больших $n$ вероятность разорения оказывается больше, чем любое наперед заданное число $\alpha < 1$. Значит, ответ на вопрос 2 также утвердительный: да, игрок разорится практически наверняка. На рис. 1 показан расчет при $\alpha = 0{,}75$.



=БИНОМРАСП(D5;D3;0,5;1)

| B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|
| | n0= | **659** | | |
| | ln(5/3)/ln(8/3)*n0= | 338,51857 | | |
| | k0= | 338 | | |
| | | | | |
| | P(0,...,k0)= | 0,75839067 | > | alhpa=0,75 |

Рис. 1

Пояснение к расчету. Если $n = 659$, то с вероятностью $0{,}7583\ldots$, превышающей $\alpha = 0{,}75$, игрок будет иметь капитал не больше 1 цента. Если $n > 659$, то вероятность разорения еще больше[1].

На рис. 2 сделана графическая попытка объяснить происходящее на сглаженной схеме биномиального распределения числа успешных циклов.

[1] Вероятность разорения с ростом $n$ растет не монотонно из-за дискретности биномиального распределения. Более точно можно сказать, что эта вероятность всегда выше некоторой монотонно возрастающей функции, приближающейся к 1 при $n \to \infty$.

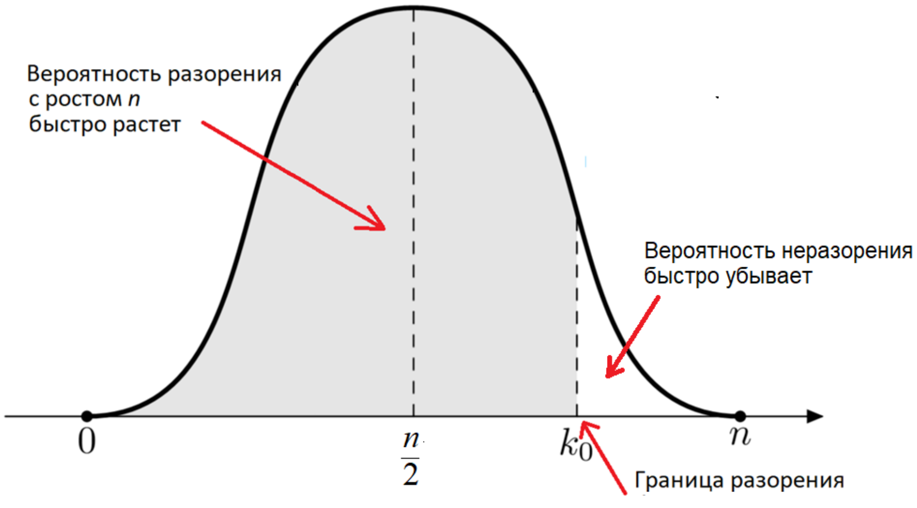



Рис. 2

На рис. 3 схематически показано распределение капитала игрока после $n$ циклов игры. Очень вероятно, что капитал будет меньше, чем $1 и очень маловероятно, что он будет больше $1, хотя в среднем он действительно оказывается равен $\$1{,}1^n$. Такой перекос получается за счет очень длинного правого хвоста распределения. Таким образом получается ответ на третий вопрос – противоречия нет.

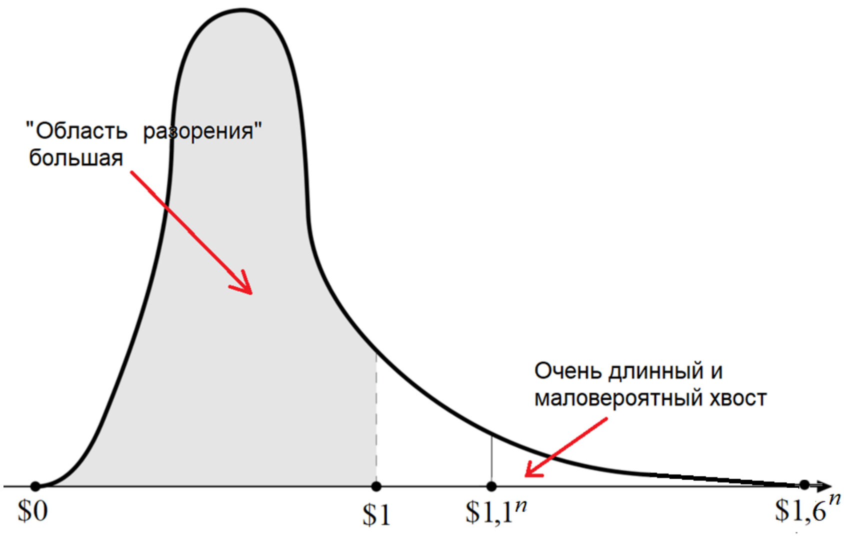



Рис. 3. «Область разорения» намного больше «области обогащения», которая выглядит как очень длинный, но очень тонкий и маловероятный хвост

Конечно, господин Рекенталер в своей игре тщательно подобрал значения + 60% и – 40%, чтобы добиться такого парадоксального эффекта. Вряд ли следует ждать, что при реальном формировании цен на биржевые бумаги описанный эффект проявится столь ярко.